MINISTERE DE L'EQUIPEMENT

E.I. T.P.E. 1976

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

— OPTION M —

(temps accordé : 3 heures)

Une base de R^n étant fixée, on considère l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ des matrices carrées (n, n) à coefficients réels représentant les endomorphismes de R^n.

On distingue dans $\mathcal{L}$ les deux matrices suivantes :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & & 1 \ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \ 1 \\ 1 & 0 & & \ \ 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & & 1 \ 0 \end{bmatrix}$$

de termes respectifs $s_{ij} = 1$ si et seulement si $j = i - 1$

$t_{ij} = 1$ si et seulement si $j = i - 1$ ou $i = 1$ et $j = n$

Première partie

I.a) Ecrire les transformés par S et T d'un vecteur $X(x_1 \ldots\ldots x_n)$.
Pour p entier positif, calculer S^p et T^p.

I.b) Montrer que T^p est orthogonale.
Calculer S^n, T^n et vérifier que $T^p = S^p + {}^t(S^{n-p})$.

I.c) Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}$ engendrés respectivement par I, S, S^2..... S^p..... et I, T, T^2,..... T^p.....
Quelles sont leurs dimensions ? Quelle est leur intersection ?

I.d) La matrice S^p est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Deuxième partie

Si A, B $\in \mathcal{L}$, on définit $(A|B) = \frac{1}{n}$ trace de $A.{}^t(B)$.

II.a) Montrer que (A|B) est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

II.b) Calculer $(S^p|S^q)$ et notamment $(S^p|S^p) = \|S^p\|^2$
et en déduire une base orthonormée du sous-espace $\mathcal{S}$.

II.c) Montrer que les éléments T^p constituent une base orthonormée du sous-espace $\mathcal{E}$.

II.d) Exprimer le produit scalaire $(S^p|T^q)$ en fonction des produits scalaires $(S^i|S^j)$.

En déduire que $T^p - S^p$ est orthogonale à tout élément σ de $\mathcal{S}$.

Existe-t-il un élément $\sigma^{**} \in \mathcal{S}$ autre que S^p ayant la propriété de rendre $T^p - \sigma^{**}$ orthogonale à tout $\sigma \in \mathcal{S}$?

II.c) Montrer que si $\tau^* \in \mathcal{E}$, il existe un seul élément $\sigma^* \in \mathcal{S}$ tel que $\tau^* - \sigma^*$ soit orthogonale au sous-espace $\mathcal{S}$.

Montrer au moyen de l'inégalité de Schwartz que

$$\frac{(\sigma|\tau^*)}{\|\sigma\| \cdot \|\tau^*\|} \quad \text{est maximum pour} \quad \sigma = \sigma^* .$$

Troisième partie

III.a) Montrer que pour p et q entiers quelconques $\|S^pT^q\| = \|T^qS^p\|$, la valeur étant indépendante de q.

III.b) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des produits à gauche des éléments σ de $\mathcal{S}$ par T

$$\mathcal{E} = \{ e = \sigma T \mid \sigma \in \mathcal{S} \}$$

Choisir une base de ce sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{L}$ et en déduire que $\sigma T = 0$ si et seulement si $\sigma = 0$.

III.c) Si $e \in \mathcal{E}$, déterminer $\tau \in \mathcal{E}$ tel que $e - \tau$ soit orthogonal à tout élément de $\mathcal{E}$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail